Seminar Nasional Hasil Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat 2023
Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat, Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Yogyakarta, Indonesia

21 November 2023 ISSN: 2985-3184

Penerapan Matriks Leslie pada Angka Kelahiran dan Harapan Hidup Wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta

Dewi Anggreini (Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa)
Pramudya Cahyandaru (Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa)

Alamat email Koresponden: anggreini1104@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan banyaknya populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta berdasarkan angka kelahiran, angka harapan hidup dan mengetahui distribusi umur pembatas dengan menggunakan nilai Eigen dan vektor Eigen matriks Leslie. Target khusus penelitian ini adalah model matriks Leslie bisa digunakan sebagai alat menghitung kelahiran dan harapan hidup populasi wanita di beberapa daerah di Indonesia. Metode riset Tahap pertama adalah menentukan subjek penelitian, Tahap Kedua adalah mengumpulkan data penelitian, analisis data dan menarik kesimpulan. Data penelitian diperoleh dari BPS Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Model matriks Leslie populasi wanita dibagi atas kelompok umur dan interval umur tertentu. Parameter yang digunakan adalah kelahiran dan harapan hidup populasi wanita. Vektor Eigen untuk mengetahui banyaknya wanita, sedangkan nilai Eigen untuk menentukan dinamika proses pertumbuhan tersebut. Hasil penelitian ini adalah model matriks Leslie untuk populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta adalah model diskrit yang dibagi atas empat belas interval umur yang dikonstruksi menggunakan angka kesuburan dan harapan hidup. Simpulan penelitian menunjukkan bahwa jumlah populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta cenderung mengalami peningkatan dengan nilai Eigen positif yang lebih besar dari satu atau dengan kata lain laju pertumbuhan wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta cenderung bernilai positif . Keberhasilan model matriks Leslie adalah penerapannya dalam kasus untuk memprediksi jumlah populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta pada tahun 2028 dengan menggunakan Program MAPLE 23.

Kata Kunci: Nilai Eigen, Vektor Eigen, Matriks Leslie

Abstract

This research aims to determine the number of female population in the Yogyakarta Special Region based on birth rate life expectancy and to know the limiting age distribution by using the Eigenvalue and Eigenvector of the Leslie matrix. The specific target of this research is that the Leslie matrix model can be used as a tool to calculate the birth and life expectancy of the female population in several regions in Indonesia. Research method The first stage is to determine the research subject, and the second stage is to collect research data, analyze data, and draw conclusions. The research data was obtained from BPS Yogyakarta Special Region Province. The Leslie matrix model of the female population is divided into age groups and certain age intervals. The parameters used are the birth and life expectancy of the female population. The Eigenvector is to determine the number of women, while the Eigenvalue is to determine the dynamics of

the growth process. The result of this study is a Leslie matrix model for the female population in the Yogyakarta Special Region is a discrete model divided into fourteen age intervals constructed using fertility rate and life expectancy. The conclusion of the research shows that the number of female population in Yogyakarta Special Province tends to increase with a positive Eigenvalue greater than one or in other words, the growth rate of women in Yogyakarta Special Province tends to be positive. The success of the Leslie matrix model is its application in predicting the number of females in Yogyakarta Special Region Province in 2028 using the MAPLE 23 Program.
Keywords: *Eigen Values, Eigen Vectors, Leslie Matrix*

Pendahuluan

Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta pada tahun 2020 memiliki jumlah penduduk sebesar 3.668.719 jiwa (Badan Pusat Statistik, 2021) dengan kepadatan penduduk sebesar 1.227 jiwa/ km² dan secara administratif terbagi menjadi 5 kabupaten/kota. Berbicara mengenai penduduk, Daerah Istimewa Yogyakarta merupakan salah satu Provinsi dengan jumlah penduduk paling banyak di Indonesia. Dengan jumlah penduduk yang begitu banyak, Daerah Istimewa Yogyakarta menjadi daerah dengan penduduk terpadat keempat di Indonesia (Badan Pusat Statistik, 2021).

Penelitian ini bertujuan menentukan banyaknya populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta berdasarkan angka kelahiran dan harapan hidup menggunakan nilai Eigen dan Vektor Eigen Matrik Leslie serta mengetahui distribusi umur pembatas dengan menggunakan Matriks Leslie. Penelitian ini penting untuk dilakukan karena terkait dengan pertumbuhan populasi wanita, dimana wanita merupakan penentu perkembangan populasi di masa yang akan datang. Selain itu, apabila dapat mengetahui proyeksi jumlah penduduk maka bisa menentukan kebijakan terkait pertumbuhan ekonomi, sosisal, budaya dan mengantisipasi apabila terjadi peledakan populasi.

Data penduduk pada waktu lalu dapat diperoleh dari hasil survei dan sensus, sedangkan untuk memenuhi kebutuhan data penduduk pada saat ini dan masa yang akan datang perlu dibuat proyeksi penduduk, yaitu perkiraan jumlah penduduk dan komposisinya di masa mendatang. (Badan Pusat Statistik, 2021:13). Pertumbuhan penduduk adalah suatu hal yang perlu diperhatikan karena pertumbuhan penduduk yang tidak terkontrol akan menyulitkan pemerintah untuk meningkatkan kesejahteraan masyarakat. Sindi dan Permanasari (2022) menyebutkan pertumbuhan populasi perempuan merupakan hal yang sangat penting untuk diamati, mengingat peran perempuan salah satunya adalah menentukan perkembangan populasi manusia di masa depan.

Pertumbuhan populasi dapat memberikan informasi apakah perubahan jumlah populasi untuk tahun berikutnya selalu meningkat, menurun atau tetap. Oleh karena itu digunakan matriks Leslie sebagai model pertumbuhan populasi untuk mengetahui prediksi jumlah dan prediksi laju pertumbuhan dari suatu populasi untuk tahun berikutnya. Sindi & Permanasari (2022) menyatakan bahwa Matriks Leslie merupakan matriks persegi yang digunakan para ahli demografi dalam pertumbuhan populasi dikembangkan oleh Sir Paul Leslie tahun 1945 yang sebelumnya dikemukakan oleh lewis pada tahun 1942.(Sanusi et al., 2019). Menurut Anggreini (2018) salah satu model yang digunakan oleh para ahli kependudukan untuk menjelaskan pertumbuhan populasi adalah model Leslie. Faktor-faktor yang digunakan pada perhitungan dengan Matriks Leslie adalah kelas umur dari suatu penduduk, faktor tingkat kesuburan penduduk, dan tingkat ketahanan hidup penduduk. Sanusi et al., (2019) seperti yang dinyatakan juga oleh Sugara (2021) bahwa pertumbuhan tersebut dipengaruhi oleh tingkat kesuburan, tingkat ketahanan hidup populasi serta rentang umur dari populasi tersebut.

Salah satu manfaat dari pemodelan dengan matriks Leslie adalah untuk mengetahui pertumbuhan populasi perempuan. Pertumbuhan populasi perempuan merupakan hal penting yang harus diamati, mengingat peran perempuan yang salah satunya adalah menentukan perkembangan populasi manusia di masa depan, karena tanpa peranan perempuan populasi tersebut tidak akan dapat berkembang. Corazon dkk (2016), proyeksi penduduk bukan merupakan ramalan jumlah penduduk tetapi suatu perhitungan ilmiah yang didasarkan pada asumsi dari komponen-komponen laju pertumbuhan penduduk, yaitu kelahiran, kematian, dan perpindahan. Ketiga komponen inilah yang menentukan besarnya jumlah penduduk dan struktur umur penduduk di masa yang akan datang. Untuk menentukan masing-masing asumsi diperlukan data yang menggambarkan tren di masa lampau hingga saat ini, factor-faktor yang mempengaruhi komponen-komponen itu, dan hubungan antara satu komponen dengan yang lain serta target yang diharapkan tercapai pada masa yang akan datang (Anggreini & Hastari, 2017).

Proyeksi penduduk bukan merupakan ramalan jumlah penduduk tetapi suatu perhitungan ilmiah yang didasarkan pada asumsi dari komponen-komponen laju pertumbuhan penduduk, yaitu kelahiran, harapan hidup, dan perpindahan. Ketiga komponen inilah yang menentukan besarnya jumlah penduduk dan struktur umur penduduk di masa yang akan datang. Dalam menentukan masing-masing asumsi diperlukan data yang menggambarkan tren di masa lampau hingga saat ini, faktor-faktor yang mempengaruhi komponen-komponen itu, dan hubungan antara satu komponen dengan yang lain serta target yang diharapkan tercapai pada masa yang akan datang. Dalam ekologi pertumbuhan populasi sering disebut sebagai ”dinamika populasi”. Ekologi biasanya didefinisikan sebagai hubungan antara makhluk hidup dengan lingkungannya (Tarumingkeng, 1994).

Pertumbuhan populasi adalah tidak mudah untuk didefinisikan, biasanya para ahli biologi berpendapat bahwa populasi sebagai kesatuan jenis individu, tetapi pendapat ini masih belum jelas (Merritt, 1973). Banyak model yang bisa digunakan untuk menjelaskan pertumbuhan populasi. Salah satu model yang digunakan oleh para ahli kependudukan adalah model Leslie. Dimana model tersebut menggunakan pendekatan matematika yaitu matriks.

Banyak pertanyaan yang timbul pada suatu populasi diantaranya, berapa banyak wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta yang berumur antara tiga puluh sampai enam puluh tahun dalam waktu lima belas tahun? Berapa banyak sekolah yang dibutuhkan dalam waktu sepuluh tahun? Berapa banyak bidan yang dibutuhkan dalam waktu sepuluh tahun? Apakah populasi meliputi dari seluruh kelompok ataukah hanya merupakan keturunannya saja? dan bagaimanakah suatu keturunan menjadi bagian yang dipertimbangkan dari suatu populasi?

Sejauh ini kita telah mengasumsikan bahwa kelahiran dan tingkat harapan hidup tidak tergantung oleh umur atau bahkan perubahan populasi yang terjadi, dengan demikian bahwa distribusi umur yang tersisa, tidak berubah (Pielou, 1977). Namun dalam model Leslie proses kelahiran dan harapan hidup itu tergantung oleh umur dan menjadi bagian yang penting dalam pertumbuhan populasi (Tarumingkeng, 1994). Dari uraian tersebut sangat perlu untukmenentukan banyaknya populasi wanita dan mengetahui distribusi umur pembatas populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta berdasarkan angka kelahiran dan harapan hidup menggunakan nilai Eigen dan vektor Eigen matriks Leslie.

Metode

Penelitian ini adalah penelitian dengan pendekatan kuantitatif dengan jenis penelitian deskriptif. Penelitian ini dilakukan dengan cara mengambil data sekunder di Badan Pusat Statistik di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta dengan total populasi sejumlah 4 Kabupaten dan 1 Kotamadya. Sampel dalam penelitian ini adalah jumlah penduduk wanitadari tahun 2017 sampai dengan 2022, denganperbandingan jumlah kelahiran anak dari tahun 2017 sampai tahun 2022. Dari hasil data kemudian diplikasikan dengan menerapkan model matriks Leslie untuk mencari jumlah penduduk, Nilai Eigen dan Vektor Eigen.

Prosedur Penelitian

Metode riset yang digunakan pada penelitian ini yaitu: Tahap pertama menentukan subjek penelitian, adapun subjek penelitiannya adalah populasi wanita pada angka kelahiran dan harapan hidup di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Tahap Kedua mengumpulkan data penelitian, adapun pengumpulan data penelitian didapatkan dari data sekunder di Badan Pusat Statistik Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Selanjutnya menganalisis data kemudian menarik kesimpulan.

Peubah yang diamati

Peubah yang diamati dalam penelitian ini adalah nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks Leslie. Nilai-nilai Eigen dari L adalah akar-akar dari polinomial karakteristiknya. Peubah yangdiamati dalam penelitian ini adalah nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks Leslie. Nilai-nilai Eigen dari L adalah akar-akar dari polinomialkarakteristiknya.

Polinomial karakteristik dari matriks Leslie adalah
$p(\lambda)=\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\ b_1\lambda^{n-2} - a_3\ b_1\ b_2\lambda^{n-3}\ .\ .\ .\ -a_n\ b_1\ b_2\ .\ .\ .\ b_{n-1}.$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ adalah sebuah vektor Eigen dari matriks Leslie L yang terkait dengan λ_1 jika dan hanya jika $\mathbf{x}$ adalah solusi non trivial dari $(\lambda I - L)x = 0$. Pada matriks Leslie terdapat vektor distribusi umur $\mathbf{x}(k)$ pada waktu t_k dengan $x^{(k)} = x \begin{bmatrix} x_1{}^{(k)} \\ x_2{}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(k)} \end{bmatrix}$, di mana

${x_i}^{(k)}$ adalah banyaknya wanita dalam kelompok umur ke-*i* pada waktu t_k. Pada waktu t_k, wanita-wanita dalam kelompok umur pertama adalah puteri dari wanita-wanita yang lahir diantara waktu t_{k-1} dan waktu t_k

Teknik Analisis Data

Dalam melakukan teknik analisis data setelah data selesai diolah yang dilakukan pertama kali adalah mencari nilai *ai* (angka kesuburan populasi wanita) yang diperoleh dari hasil bagi antara jumlah rata-rata angkakelahiran anak yang dilahirkan seorang ibu pada tahun 2017-2022 dibagi dengan jumlah populasi wanita di tahun 2017 dan *bi* (angka harapan hidup populasi wanita) yang diperoleh dari hasil pembagian jumlah penduduk wanita tahun 2017 dengan jumlah penduduk wanita tahun 2022. Kedua, mengkontruksi model matriks Leslie pada pertumbuhan populasi. Ketiga setelah matrik Leslie terbentuk kemudian memasukan data jumlah populasi wanita di tahun 2017 untukmenghasilkan prediksi jumlah penduduk wanita di tahun 2030. Ketiga, memcari nilai Eigen yang positif pada matriks tersebut. Kelima, menentukan vektor Eigen dari nilai Eigen yang positif. Keenam, menggunakan persamaan pendekatan untuk menentukan distribusi umur pembatas. Ketujuh diketahui banyaknya populasi wanita untuk jangka waktu yang akan datang. Kedelapan menyusun laporan penelitian dan hasil olahan data melalui aplikasi MAPLE 23.

Matriks

Menurut Kariadinata (2013) matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalamsuatu jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom, dan diletakkan diantara dua tanda kurung. Sedangkan menurut Anton dan Rorres (2004) sebuah matriks dengan *n* baris dan *n* kolom dinamakan matriks kuadrat berorde *n* (*square matriks of orde n*), dan entri-entri$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ dikatakan berada pada diagonal utama dari *A*. Bila *A* adalah matriks yang mempunyai *n* baris dan *n* kolom (bertipe *n* x *n*).Invers Matriks

Menurut Adiwijaya (2014) misalkan *A* dan*B* merupakan matriks bujur sangkar yang berukuran sama dan *I* adalah matriks identitas. Jika *A*.*B*=*I* maka *B* dinamakan invers dari matriks *A* (sebaliknya, *A* merupakan invers dari matriks *B*). Notasi bahwa B merupakan matriks invers dari A adalah B= A^{-1} ,sebaliknya A= B^{-1}

Diagonalisasi Matriks

Menurut Anton dan Rorres (2004) matriks diagonal suatu matriks bujur sangkar yang entrinya tidak terletak pada diagonal utamaadalah nol disebut matriks diagonal (*diagonal matrix*). Suatu matriks diagonal umum *D*, *n* x *n* dapat ditulis

Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini dilakukan dengan cara mengambil data sekunder di Badan Pusat Statistik di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta dengan total populasi sejumlah 2.037.662. Sampel dalam penelitian ini adalah jumlah penduduk wanita dari tahun 2017 sampai dengan 2022, dengan perbandingan jumlah kelahiran anak dari tahun 2017 sampai tahun 2022. Dari hasil data kemudian diplikasikan dengan menerapkan model matriks Leslie untuk mencari jumlah penduduk, nilai Eigen dan vektor Eigen.

Model Matriks Leslie dalam Pertumbuhan Populasi

Dalam model Leslie, wanita atau betina dibagi atas kelompok umur yang kurun waktunya sama. Secara spesifik, misalkan umur maksimum yang dicapai oleh sebarang wanita atau betina di dalam populasi itu adalah *M* tahun (atau dinyatakan dalam satuan waktu yang lain) dan kemudian populasi itu dibagi atas *n* kelompok umur. Maka kurun waktu dalam setiap kelompok *M/n* tahun. Kelompok umur tersebut akan dijelaskan oleh Tabel 1.

Tabel 1. (Kelompok Umur Model Matriks Leslie)

Kelompok Umur	Interval Umur
1	$[\ 0, M/n\ )$
2	$[\ M/n, 2M/n\ )$
3	$[\ 2M/n, 3M/n\ )$
$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)$	$[(n-2)M/n, (n-1)M/n]$
n	$[(n-1)\ M/n,\ M]$

Misalnya diketahui banyaknya wanita atau betina dalam setiap kelompok dari ke-*n* kelompok tersebut pada waktu *t* = 0. Khususnya, misalkan, ada ${x_1}^{(0)}$ wanita atau betina dalam kelompok pertama, ${x_2}^{(0)}$ wanita atau betina di dalam kelopok kedua, ${x_3}^{(0)}$ wanita atau betina di dalam kelompok ketiga, dan seterusnya. Dengan bilangan ke-*n* ini akan dibentuk sebuah vektor kolom $x^{(0)}$ yaitu:$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(0)} \end{bmatrix}$, vektor ini dinamakan vektor distribusi umur mula-mula (*initial age distribution vektor*). Dengan berjalannya waktu, banyaknya wanita atau betina di dalam setiap kelompok dari ke-*n* kelompok tersebut akan berubah karena tiga proses biologis, yakni: kelahiran, kematian dan penuaan. Dengan menjelaskan ketiga proses ini secara kuantitatif, akan dapat dilihat bagaimana memproyeksikan vektor distribusi umur mula-mula tersebut ke masa depan. Cara yang paling mudah mempelajari proses penuaan adalah dengan mengamati populasi pada waktu-waktu diskrit, katakanlah $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$.Model Leslie mensyaratkan bahwa kurun waktu diantara dua waktu pengamatan yang berturutan adalah sama seperti kurun waktu dari selang (interval) umur, dan ditulis sebagai berikut: $t_0 = 0$, $t_1 = M/n, t_2 = 2M/n$, sampai $t_k = k\ M/n$. Dengan asumsi ini, maka semua wanita atau betina dalam kelompok ke-$(i+1)$ pada waktu t_{k+1} telah berada dalam kelompok ke-i pada waktu tk^{k} .

Parameter dalam Model Matriks Leslie

Proses kelahiran dan proses kematian diantara dua waktu pengamatan yang berturutan dapat dijelaskan dengan menggunakan parameter-parameter demografis (Tabel 2).

Tabel 2. Parameter dalam model Matriks Leslie

a_i $i = 1,2,\dots,n$	Jumlah rata-rata dari anak perempuan yang dilahirkan oleh seorang wanita selama dia berada dalam kelompok umur ke-*i*.
b_i $i = 1,2,\dots,n-1$	Banyaknya wanita dalam kelompok umur ke-i yang dapat diharapkan masih hidup dan sampai ke kelompok umur ke-$(i+1)$.

Berdasarkan definisinya maka akan diperoleh bahwa (i) $a_i \geq 0$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan (ii) $0 < b_i \leq 1$ untuk $i = 1,2,\dots,n-1$. Dapat dilihat bahwa, tidak boleh membiarkan adanya b_i yang sama dengan nol, karena jika hal ini terjadi maka tidak akan ada wanita atau betina yang masih hidup sesudah kelompok umur ke-i. Dan juga dianggap bahwa sedikit-dikitnya ada satu a_i yang positif sehingga akan terjadi kelahiran. Setiap kelompok umur di mana nilai a_i yang bersangkutan adalah positif dinamakan kelompok umur subur (*fertile age class*)Selanjutnya akan didefinisikan vektor distribusi umur $\mathbf{x}(k)$ pada waktu

t_k dengan $x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$, di mana $x_i^{(k)}$ adalah banyaknya wanita atau betina dalam kelompok umur ke-i pada waktu t_k. Pada waktu t_k, wanita-wanita dalam kelompok umur pertama adalah puteri dari wanita-wanita yang lahir diantara waktu t_{k-1} dan waktu t_k. Jadi, dapat dituliskan

$$\left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{wanita dalam}\\ \text{kelompok 1}\\ \text{pada waktu } t_k\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{puteri yang}\\ \text{dilahirkan}\\ \text{oleh wanita}\\ \text{dalam kelompok 1}\\ \text{di antara } t_{k-1}\\ \text{dan waktu } t_k\end{array}\right\} +$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{puteri yang}\\ \text{dilahirkan}\\ \text{oleh wanita}\\ \text{dalam kelompok 1}\\ \text{di antara } t_{k-1}\\ \text{dan waktu } t_k\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{puteri yang}\\ \text{dilahirkan}\\ \text{oleh wanita}\\ \text{dalam kelompok 2}\\ \text{di antara waktu } t_{k-1}\\ \text{dan waktu } t_k\end{array}\right\} + \ldots + \left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{puteri yang}\\ \text{dilahirkan oleh}\\ \text{wanita dalam}\\ \text{kelompok } n\\ \text{di antara waktu}\\ t_{k-1} \text{ dan waktu } t_k\end{array}\right\}$$

secara matematis

$x_1^{(k)} = a_1\ x_1^{(k-1)} + a_2\ x_2^{(k-1)} + \ldots + a_n\ x_n^{(k-1)}$ .... (1)

Banyaknya wanita dalam kelompok umur ke-(i+1) (i = 1, 2, . . . , $n-1$) pada waktu t_k adalah wanita dalam kelompok ke$-i$ pada waktu t_{k-1} yang masih hidup pada waktu t_k.Jadi,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{wanita dalam}\\ \text{kelompok } i+1\\ \text{pada waktu } t_k\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{jumlah wanita}\\ \text{dalam kelompok } i\\ \text{yang hidup}\\ \text{sampai ke kelompok } i+1\end{array}\right\}$$

secara matematis, $x_{i+1}^{(k)} = b_i\ x_i^{(k-1)},\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1$ .... (2)

Dengan menggunakan notasi matriks, Persamaan (1) dan (2) dapat dituliskan

Dalam bentuk $\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$

atau secara lebih ringkas $x^{(k)} = L\ x^{(k-1)}$, dengan$k = 1,\ 2,\ . . .$ .... (3)

Di mana *L* adalah matriks Leslie

$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$.. (4)

Dari Persamaan (3) didapatkan bahwa

$x^{(1)} = L\ x^{(0)}$

$x^{(2)} = L\ x^{(1)} = L^2\ x^{(0)}$ .... (5)

$x^{(3)} = L\ x^{(2)} = L^3 x^{(0)}$

$x^{(k)} = L\ x^{(k-1)} = L^k x^{(0)}$

Jadi, jika diketahui distribusi umur permulaan $x^{(0)}$ dan matriks Leslie *L*, maka dapat ditentukan distribusi umur wanita atau betina pada sebarang waktu kemudian

Pembahasan

Distribusi Umur Pembatas (*Limiting Age Distribution*)

Walaupun Persamaan (5) memberikan distribusi umur dari populasi pada sebarang waktu, namun persamaan itu tidak segera memberikan suatu gambaran umum mengenai dinamika dari proses pertumbuhan tersebut.

Teorema 1

Sebuah matriks Leslie *L* mempunyai sebuah nilai Eigen positif yang unik λ_1. Nilai Eigen ini mempunyai multiplisitas 1 dan mempunyai sebuah vektor Eigen x_1 yang semua entrinya adalah positif.

Bukti:

(i) Matriks Leslie *L* mempunyai sebuah nilai Eigen yang positif λ_1.

Nilai Eigen adalah akar dari persamaan karakteristiknya, yaitu $p(\lambda) = |\lambda I - L| = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \ldots - a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}$$

Jika $p(\lambda) = 0$, maka

$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \ldots - a_nb_1b_2\ldots b_{n-1} = 0$ .... (6)

Karena salah satu akar dari persamaan (6) harus merupakan faktor pembagi dari koefisien $a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}$, yaitu ± 1, $\pm a_n$, $\pm b_1$, $\pm b_2$, . . . , $\pm b_{n-1}$

Dimisalkan akan dicari solusi dari salah satu faktor pembagi tersebut, misalnya diambil $b_1 > 0$ sebagai solusi atau b_1 sebagai akarnya, sehingga Persamaan (6) menjadi

$P(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \ldots - a_nb_1b_2\ldots b_{n-1} = 0$

$\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + a_2b_1\lambda^{n-2} + a_3b_1b_2\lambda^{n-3} + \ldots + a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}$

$(\lambda - b_1)\ (a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3b_2\lambda^{n-3} + \ldots + a_nb_2\ldots b_{n-1}) = \lambda^n$

Berarti diperoleh sebuah nilai Eigen yang positif λ_1, yaitu $\lambda_1 = b_1$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa matriks Leslie L mempunyai nilai Eigen λ_1 yang tunggal atau $\lambda_1 = b_1$ adalah tunggal. Akan diasumsikan bahwa matriks Leslie tersebut memiliki nilai Eigen positif yang lain. Sehingga untuk membuktikannya digunakan cara kontradiksi. Misalnya λ_2 adalah nilai Eigen positif yang lain dengan asumsi $\lambda_1 \neq \lambda_2$ atau $\lambda_2 \neq b_1$.

Diket $P(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \ldots - a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}$

Jika $p(\lambda) = 0$, maka $\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \ldots - a_nb_1b_2\ldots b_{n-1} = 0$

Kedua ruas dibagi dengan λ^n, menjadi 1

$= \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda^n}$

Maka $q(\lambda) = 1$, untuk $\lambda \neq 0$ atau

$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda^n}$.. (7)

terbukti bahwa λ_1 dan λ_2 adalah merupakan solusi dari sistem persamaan $q(\lambda) = 1$. Sehingga didapat $q(\lambda_1) = 1$ dan $q(\lambda_2) = 1$ atau $q(\lambda_1) = q(\lambda_2)$. Kemudian dengan menggunakan persaman (7), dan jika $q(\lambda_1) = q(\lambda_2)$

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2b_1}{{\lambda_1}^2} + \frac{a_3b_1b_2}{{\lambda_1}^3} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{{\lambda_1}^n} = \frac{a_1}{\lambda_2} + \frac{a_2b_1}{{\lambda_2}^2} + \frac{a_3b_1b_2}{{\lambda_2}^3} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{{\lambda_2}^n}$$

Jika $q(\lambda_1)$ dikurangkan dengan $q(\lambda_2)$ maka

$$a_1\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)+a_2b_1\left(\frac{1}{{\lambda_1}^2}-\frac{1}{{\lambda_2}^2}\right)$$
$$+a_3b_1b_2\left(\frac{1}{{\lambda_1}^3}-\frac{1}{{\lambda_2}^3}\right)+\ldots+a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}\left(\frac{1}{{\lambda_1}^n}-\frac{1}{{\lambda_2}^n}\right)=0$$

menjadi,

$$a_1\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\right)+a_2b_1\left(\frac{{\lambda_2}^2-{\lambda_1}^2}{{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2}\right)$$
$$+a_3b_1b_2\left(\frac{{\lambda_2}^3-{\lambda_1}^3}{{\lambda_1}^3{\lambda_2}^3}\right)+\ldots+a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}\left(\frac{{\lambda_2}^n-{\lambda_1}^n}{{\lambda_1}^n{\lambda_2}^n}\right)=0$$

Atau

$$\frac{a_1}{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_2-\lambda_1)+\frac{a_2b_1}{{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2}({\lambda_2}^2-{\lambda_1}^2)+\frac{a_3b_1b_2}{{\lambda_1}^3{\lambda_2}^3}({\lambda_2}^3-{\lambda_1}^3)+\ldots$$
$$+\frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{{\lambda_1}^n{\lambda_2}^n}({\lambda_2}^n-{\lambda_1}^n)=0 \quad \text{.........} \quad (8)$$

Persamaan (8) akan berlaku jika $\lambda_1=\lambda_2$, atau terjadi kontradiksi dengan asumsi yang menyatakan $\lambda_1\neq\lambda_2$. Sehingga yang benar adalah nilai Eigen yang positif dari matriks Leslie adalah tunggal, yaitu $\lambda_1=\lambda_2=b_1$.

(ii) Nilai Eigen positif λ_1 mempunyai multiplisitas 1

$\lambda_1x_4=b_3x_3$

$x_4=\frac{b_3}{\lambda_1}x_3\rightarrow x_4=\frac{b_3}{\lambda_1}\left(\frac{b_1b_2}{{\lambda_1}^2}x_1\right)$

$-b_{n-1}x_{n-1}+\lambda_1x_n=0$

$\lambda_1x_n=b_{n-1}\ x_{n-1}$

$x_n=\frac{b_{n-1}}{\lambda_1}x_{n-1}$

$x_n=\frac{b_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda_1}x_{n-1}$

Sehingga diperoleh

$x_2=\frac{b_1}{\lambda_1}x_1$

$x_3=\frac{b_2}{\lambda_1}x_2=\frac{b_1b_2}{{\lambda_1}^2}x_1$

$x_4=\frac{b_3}{\lambda_1}x_3=\frac{b_1b_2b_3}{{\lambda_1}^3}x_1$

$\vdots$

$x_n=\frac{b_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda_1}x_{n-1}=\frac{b_1b_2\ldots b_{n-1}}{{\lambda_1}^{n-1}}x_1$

Jika misal diambil x_1= 1, maka vektor Eigen **x** yang bersesuaian dengan λ_1 yaitu

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1b_2/{\lambda_1}^2 \\ b_1b_2b_3/{\lambda_1}^3 \\ \vdots \\ b_1b_2\ldots/{\lambda_1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa vektor Eigen matriks Leslie semua elemennya adalah positif.

Teorema 2

Jika λ_1 adalah nilai Eigen positif yang unik dari sebuah matriks Leslie L dan jika λ_i adalah sebarang nilai Eigen riil atau kompleks dari L, maka $|\lambda_k| \le \lambda_1$.

Bukti:

Telah dibuktikan bahwa λ_1 adalah nilai Eigen positif yang tunggal, maka λ_k adalah nilai Eigen yang bisa berupa bilangan riil atau k ompleks. Jika misal λ_k = 0 terbukti bahwa $|\lambda_k| \le \lambda_1$ Kemudian diambil sebarang $\lambda_k = re^{i\theta}$ dengan $i = \sqrt{-1}$, Untuk membuktikan $|\lambda_k| \le \lambda_1$ sama dengan memperlihatkan $|r| \le \lambda_1$. Syarat perlu dan syarat cukup agar λ_k adalah sebuah nilai Eigen, λ_k harus merupakan solusi dari sistem persamaan $q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda_k} + \frac{a_2b_1}{{\lambda_k}^2} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{{\lambda_k}^n} = 1$,

$q(\lambda) = 1$ untuk $\lambda \ne 0$

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{re^{i\theta}} + \frac{a_2b_1}{(r^{i\theta})^2} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{(r^{i\theta})^n} = 1$$

$$\frac{a_1}{r}\left(e^{i\theta}\right)^{-1} + \frac{a_2b_1}{r^2}\left(e^{i\theta}\right)^{-2} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{r^n}\left(e^{i\theta}\right)^{-n} = 1$$

$$\frac{a_1}{r}\left(e^{-i\theta}\right) + \frac{a_2b_1}{r^2}\left(e^{-2i\theta}\right) + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{r^n}\left(e^{-ni\theta}\right) = 1$$

$$\frac{a_1}{r}(cos(-\theta) + i\,sin(-\theta)) + \frac{a_2b_1}{r^2}(cos(-2\theta) + i\,sin(-2\theta))^{-2} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{r^n}(cos(-n\theta) + i\,sin(-n\theta)) = 1$$

$$\frac{a_1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \frac{a_2b_1}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{r^n}(cos\,n\,\theta - i\,sin\,n\,\theta) = 1$$

Artinya

$\frac{a_1}{r}(cos\,\theta) + \frac{a_2b_1}{r^2}(cos\,2\,\theta) + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{r^n}(cos\,n\,\theta) = 1$ dan

$$\frac{a_1}{r}(sin\,\theta) + \frac{a_2b_1}{r^2}(sin\,2\,\theta) + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{r^n}(sin\,\theta) = 0$$

Jika diambil bagian yang riil saja yaitu,

$$\frac{a_1}{r}(cos\,\theta)+\frac{a_2b_1}{r^2}(cos\,2\,\theta)+\ldots+\frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{r^n}(cos\,n\,\theta)=1$$

Karena λ_1 adalah nilai Eigen sehingga λ_1 memenuhi persamaan $q(\lambda)=1$ sehingga

$$q(\lambda)=\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2b_1}{{\lambda_1}^2}+\ldots+\frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{{\lambda_1}^n}=1$$

Jika

$$\frac{a_1}{r}(\cos\theta)+\frac{a_2b_1}{r^2}(\cos 2\theta)+\ldots+\frac{a_nb_1b_2..b_{n-1}}{r^n}(\cos n\theta)=\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2b_1}{{\lambda_1}^2}+\ldots+\frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{{\lambda_1}^n}$$

Persamaan ini dikurangkan menjadi

$$a_1\left(\frac{cos\,\theta}{r}-\frac{1}{\lambda_1}\right)+a_2b_1\left(\frac{cos\,2\theta}{r^2}-\frac{1}{{\lambda_1}^2}\right)+\ldots+a_nb_1b_2\ldots.b_{n-1}\left(\frac{cos\,n\theta}{r^n}-\frac{1}{{\lambda_1}^n}\right)=0$$

$$a_1\left(\frac{\lambda_1\cos\theta-r}{r\lambda_1}\right)+a_2b_1\left(\frac{{\lambda_1}^2\cos 2\theta-r^2}{r^2{\lambda_1}^2}\right)+\ldots+a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}\left(\frac{{\lambda_1}^n\cos n\theta-r^n}{r^n{\lambda_1}^n}\right)=0 \quad \text{.........} \ (9)$$

Persamaan (9) berlaku jika $\lambda_1\,cos\,\theta-r=0$. Diperoleh $r=\lambda_1\,cos\,\theta$.

Karena $-1\leq cos\,\theta\leq 1 \quad \rightarrow \quad -\lambda_1\leq r\leq\lambda_1$, artinya $|r|\leq\lambda_1$.

Jikaλ_1 memenuhi $|\lambda_k|<\lambda_1$ dikatakan bahwa λ_1 adalah sebuah nilai Eigen yang dominan (*dominant Eigen value*) dari *L*. Karena itu syarat dari teorema 2 tidak cukup kuat untuk membuktikan bahwa nilai Eigen dari matriks Leslie adalah dominan.

Teorema 3

Jika dua entri yang berturutan a_i dan a_{i+1} dalam baris pertama dari sebuah matriks Leslie *L* tidak sama dengan nol maka nilai Eigen positif dari *L* adalah dominan.

Disebut nilai Eigen yang dominan jika $|\lambda_k|<\lambda_1$ tidak boleh $|\lambda_k|=\lambda_1$ atau ditunjukkan $|\lambda_k|\neq\lambda_1$. Menurut definisi $a_i>0$ dan $a_{i+1}>0$ dengan $i=1,2,\ldots,n$. Tanpa mengurangi keumuman teorema dimisalkan $i=1$. Jadi a_1 >0 dan a_2> 0, Sehingga akan ditunjukkan $|\lambda_k|\neq\lambda_1$ dengan $k=2,3,\ldots,n$, dimanaλ_1 positif. Untuk membuktikannya dilakukan cara kontradiksi. Yaitu, akan diasumsikan bahwa $\lambda_k=\lambda_1$.

jika $\lambda_k=\lambda_1$ maka $re^{i\theta}=\lambda_1$, sehingga $r(\cos\theta+i\sin\theta)=\lambda_1$

$$r\cos\theta+ir\sin\theta=\lambda_1+i0$$

Diperoleh $\qquad r\,cos\,\theta=\lambda_1$

$$r\,sin\,\theta=0$$

Jika persamaan $r\,cos\,\theta=\lambda_1$ dikalikan dengan $cos\,\theta$menjadi $r\,cos^2\,\theta=\lambda_1\,cos\,\theta$
artinya $\qquad \lambda_1\,cos\,\theta\neq r \qquad$ atau $\qquad \lambda_1\,cos\,\theta-r\neq 0$

Data Jumlah Penduduk Wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta

Berikut ini data jumlah penduduk wanita mulai tahun 2017-2022 di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta yang telah diteliti dalam penelitian. Karena hanya sedikit saja wanita yang berumur diatas 45 tahun yang melahirkan anak, maka akan dibatasi dari populasi wanita yang berumur diantara 15 dan 44 tahun hal ini dikarenakan interval umur kesuburan wanita yaitu 15-44 tahun. Data ini adalah untuk kelompok umur yang kurun waktunya 5 tahun, sehingga jumlah seluruhnya ada 14 kelompok umur.

Dari data Tabel 1 akan dilakukan analisis data dengan mencari nilai a_i (angka kesuburan) atau banyaknya anak lahir saat masa usia subur wanita dan b_i (angka harapan hidup). Nilai a_i diperoleh dari hasil bagi antara jumlah rata-rata angka kelahiran anak yang dilahirkan seorang wanita pada tahun 2017-2022 dibagi dengan jumlah populasi wanita di tahun 2017 dan b_i (angka harapan hidup populasi wanita) yang diperoleh dari hasil pembagian jumlah penduduk wanita tahun 2022 dengan jumlah penduduk wanita tahun 2017. Dengan menggunakan matriks Leslie populasi wanita dibagi atas beberapa interval kelas umur, dengan interval umur kesuburan wanita yaitu 15-44 tahun, untuk memprediksi jumlah populasi wanita 6 tahun berikutnya yaitu pada tahun 2028.

Tabel 2. Jumlah penduduk wanita dan anak yang dilahirkan di tahun 2017-2022

Kelas Umur	Jumlah Penduduk Tahun 2017	Jumlah anak yang lahir di tahun 2017-2022	Jumlah Penduduk Tahun 2022
0-4	128.959	-	139.447
5-9	123.977	-	133.456
10-14	129.000	-	125.965
15-19	140.611	6.629	137.756
20-24	152.872	47.609	163.175
25-29	147.259	66.291	169.039
30-34	146.301	71.714	150.562
35-39	142.973	39.172	149.015
40-44	137.779	11.450	143.514
45-49	130.849	603	137.236
50-54	121.015	-	129.722
55-59	107.366	-	118.860
60-64	89.262	-	104.773
65+	206.648	-	235.142
TOTAL	**1.904.871**	**243.468**	**2.037.662**

Tabel 3. Angka Kesuburan dan Harapan Hidup Populasi Wanita

Kelas Umur	ai	bi
0-4	-	1,034872
5-9	-	1,016035
10-14	-	1,067876
15-19	0,047144	1,160471
20-24	0,311430	1,105755
25-29	0,450166	1,022430
30-34	0,490181	1,018551
35-39	0,273982	1,003784
40-44	0,083104	0,996059
45-49	0,004608	0,991387
50-54	-	0,982192
55-59	-	0,975849
60-64	-	2,634290
65+	-	-

Selanjutkan akan dilakukan analisis menggunakan programMaple untuk mengetahui dinamika proses pertumbuhan tersebut berdasarkan nilai Eigen dan vektor Eigen matriks Leslie. Kemudian dengan menggunakan persamaan pendekatan untuk distribusi umur pembatas $x^k \cong \lambda_1 x^{(k-1)}$ akan dicari dinamika pertumbuhan penduduk wanita di provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Berdasarkan Tabel 2 diperoleh matriks. Setelah dibentuk matriks Leslie, berdasarkan persamaan $x^{(k)} = Lx^{(k-1)}$,, dengan untuk memprediksi jumlah wanita pada tahun 2028.

Dengan bentuk $\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} =$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0471 & 0.3114 & 0.4501 & 0.4901 & 0.2739 & 0.0831 & 0.0046 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.03487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.01603 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0678 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1604. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1057 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0224 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0185 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0037 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9960 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 099138 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9821 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9758 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.6342 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 139447 \\ 133456 \\ 125965 \\ 137756 \\ 163175 \\ 169039 \\ 150562 \\ 149015 \\ 143514 \\ 137236 \\ 129722 \\ 118860 \\ 104773 \\ 235142 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 260548 \\ 144310 \\ 135595 \\ 134505 \\ 159852 \\ 180422 \\ 172825 \\ 153347 \\ 149566 \\ 142939 \\ 136042 \\ 127399 \\ 115889 \\ 275993 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan program MAPLE 2021 nilai Eigen yang positif dan vektor Eigennya dapat diaproksimasikan dengan

$$\lambda_1 = 1{,}141812845 \text{dan} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9063411789 \\ 0.8065020149 \\ 0.7542778566 \\ 0.7666033733 \\ 0.7423944449 \\ 0.6647730013 \\ 0.5930089228 \\ 0.5213226240 \\ 0.4547751358 \\ 0.3948616971 \\ 0.3396616192 \\ 0.2902914019 \\ 0.6697347473 \end{bmatrix}$$

Simpulan

Berdasarkan hasil analisis awal peneliti tentang model matriks Leslie pada populasi wanita di provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut: Pertama, Nilai Eigen untuk populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta adalah sebesar $\lambda 1 = 1.141812845$ artinya $\lambda 1 > 1$ sehingga tiap-tiap lima tahun populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta akan cenderung mengalami peningkatan. Jumlah populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta di tahun

2028 sebesar 20.343.361 juta jiwa. Dari vektor Eigen dapat dilihat bahwa didalam limitnya, untuk tiap-tiap satu juta wanita yang berumur diantara 0-4 tahun akan ada 91% wanita yang berumur diantara 5-9, akan ada 81% wanita yang berumur diantara 10-14, akan ada 75% wanita yang berumur diantara 15-19, dan seterusnya. Kedua, Distribusi umur pembatas untuk populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta adalah $x^{(k)} \sim \lambda 1\ x^{(k-1)}$ sehingga $x^{(k)} \sim 1.141812845\ x^{(k-1)}$ sehingga jumlah populasi wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta pada tahun 2028 cenderung mengalami peningkatan atau dapat dikatakan laju pertumbuhan populasi cenderung bernilai positif.

Referensi

AM Corazon Yuslenita Muda, N. H. (2016). Aplikasi matriks leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan perempuan di Provinsi Riau Pada Tahun2017. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika,2(1),* 1–11.

Anggreini, D. (2018). Model matriks Leslie dengan strategi pemanenan pada kelompok umur termuda pada angka kesuburan dan harapan hidup populasi domba betina. *Fourier*, *7*(1), 23–34.

Anggreini, D., & Hastari, R. C. (2017). Penerapan matriks leslie pada angka kelahiran dan harapan hidup wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. *Pythagoras: Jurnal Pendidikan Matematika*, *12*(2), 109–122.

Anton, H., & Rorres, C. (1988). *Penerapan aljabar linear*. Jakarta:Erlangga. Badan Pusat Statistik. (2021). *Proyeksi Penduduk Indonesia (Indonesian Population Projection) 2010-2035*. Jakarta: Badan Pusat Statistik.

Gere, J. M., & Weaver, W. (1987). *Aljabar matriks untuk para insinyur*.Jakarta: Erlangga.

Marzuki, C. C., & Malko, O. (2016). Karakterisasi matriks leslie ordo empat.*Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, *13*(1), 108–114.

Merritt, E. J. (1973). *Ecology an evolutionary approach,*.New York: Addison- Wesley Publishing Company, Inc.

Montshiwa, I. (2007). *Leslie matrix model in population dynamics*. New York: Institute for mathematical Science (AIMS).

Pielou, E. C. (1977). *Mathematical ecology*. New York: John Wiley & Sons Inc.

Pratama, Y., Prihandono, B., & Kusumastuti., N. (2013). Aplikasi matriks leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. *Bimaster*, *2*(03), 163–172.

Rothenberg, R. (1983). *Linear algebra with computer application*. John Wiley & Sons Inc.

Sanusi, W., Sukarna, S., & Ridiawati, N. (2019). Matriks leslie dan aplikasinya dalam memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan penduduk di Kota Makassar. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, *1*(2), 142. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v1i2.9189

Sindi, & Permanasari, Y. (2022). Prediksi populasi dengan matriks leslie untuk pemetaan pemberdayan perempuan. *Jurnal Riset Matematika*, 23–29. https://doi.org/10.29313/jrm.v2i1.790

Sugara, M. (2021). Matriks leslie dan aplikasinya pada pemodelan jumlah populasi perempuan di Sumatera Barat. *Journal Of Mathematics UNP*, *6*(4), 16–22. http://ejournal.unp.ac.id/students/index.php/mat/article/view/12208 Sukardjono. (2000). *Aljabar Linier dan penerapannya*. Universitas Negeri Yogyakarta.

Tarumingkeng, R. C. (1994). *Dinamika populasi (kajian ekologi kuantitatif)*.Pustaka Sinar Harapan.